

8.5

多元函数的极值

同步练习

8.5.一

1. 函数 $f(x, y) = 4(x - y) - x^2 - y^2$ 的极大值为_____

解 令
$$\begin{cases} f_x(x, y) = 4 - 2x = 0 \\ f_y(x, y) = -4 - 2y = 0 \end{cases} \quad \text{解得 } x = 2, y = -2$$

$$f_{xx}(x, y) = -2 \quad f_{xy}(x, y) = 0 \quad f_{yy}(x, y) = -2$$

在点 $(2, -2)$ 处 $A = -2, B = 0, C = -2$

由于 $AC - B^2 = 4 > 0$, $A = -2 < 0$, 故 $f_{\text{极大}}(2, -2) = 8$.

事实上
$$\begin{aligned} f(x, y) &= 4(x - y) - x^2 - y^2 \\ &= 4x - 4y - x^2 - y^2 \\ &= 8 - (x - 2)^2 - (y + 2)^2 \end{aligned}$$

故 $f_{\text{极大}}(2, -2) = 8$.

8.5.一

2. 函数 $f(x, y) = x^2 - xy + y^2 + 3x$ 的极小值为_____

解 令 $\begin{cases} f_x(x, y) = 2x - y + 3 = 0 \\ f_y(x, y) = -x + 2y = 0 \end{cases}$ 解得 $x = -2, y = -1$

$$f_{xx}(x, y) = 2 \quad f_{xy}(x, y) = 0 \quad f_{yy}(x, y) = 2$$

在点 $(-2, -1)$ 处 $A = 2, B = 0, C = 2$

由于 $AC - B^2 = 4 > 0$, $A = 2 < 0$, 故 $f_{\text{极小}}(-2, -1) = -3$.

8.5.一

3. 函数 $z = xy$ 在条件 $x + y = 1$ 下的极大值为_____

解 构造函数 $F(x, y, \lambda) = xy + \lambda(x + y - 1)$

$$\text{令} \begin{cases} F_x = y + \lambda = 0 \\ F_y = x + \lambda = 0 \\ F_\lambda = x + y - 1 = 0 \end{cases}$$

$$\text{解得 } x = y = \frac{1}{2},$$

$$\text{唯一驻点, } z_{\text{极大}} = \frac{1}{4}$$

8.5.二

1.求函数 $z = x^3 + y^3 - 3xy + 4$ 的极值.

$$\text{解 令} \begin{cases} f_x(x, y) = 3x^2 - 3y = 0 \\ f_y(x, y) = 3y^2 - 3x = 0 \end{cases} \quad \text{解得} \begin{cases} x_1 = 0 \\ y_1 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x_2 = 1 \\ y_2 = 1 \end{cases}$$

$$f_{xx}(x, y) = 6x \quad f_{xy}(x, y) = -3 \quad f_{yy}(x, y) = 6y$$

在点 $(0,0)$ 处 $A = 0, B = -3, C = 0$

由于 $AC - B^2 = -9 < 0$, 故 $(0,0)$ 点不是极值点

在点 $(1,1)$ 处 $A = 6, B = -3, C = 6$

由于 $AC - B^2 = 27 > 0$,

$A = 6 > 0$, 故 $f_{\text{极小}}(1,1) = 3$.

8.5.二

$$\begin{cases} x_4 = 2 \\ y_4 = 2 \end{cases}$$

2. 求函数 $z = x^3 + y^3 - 3x^2 - 3y^2$ 的极值.

解 令 $\begin{cases} f_x(x, y) = 3x^2 - 6x = 0 \\ f_y(x, y) = 3y^2 - 6y = 0 \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} x_1 = 0 \\ y_1 = 0 \end{cases} \begin{cases} x_2 = 0 \\ y_2 = 2 \end{cases} \begin{cases} x_3 = 2 \\ y_3 = 0 \end{cases}$

$$f_{xx}(x, y) = 6x - 6 \quad f_{xy}(x, y) = 0 \quad f_{yy}(x, y) = 6y - 6$$

在点 $(0, 0)$ 处 $A = -6, B = 0, C = -6$

由于 $AC - B^2 = 36 > 0$ 且 $A = -6 < 0$, 故 $f_{\text{极大}}(0, 0) = 0$.

在点 $(0, 2)$ 处 $A = -6, B = 0, C = 6$

由于 $AC - B^2 = -36 < 0$ 故 $(0, 2)$ 不是极值点.

在点 $(2, 0)$ 处 $A = 6, B = 0, C = -6$

由于 $AC - B^2 = -36 < 0$ 故 $(2, 0)$ 不是极值点.

在点 $(2, 2)$ 处 $A = 6, B = 0, C = 6$

由于 $AC - B^2 = 36 > 0$ 且 $A = 6 > 0$, 故 $f_{\text{极小}}(2, 2) = -8$.

8.5.二

3. 求函数 $f(x, y) = x^2(2 + y^2) + y \ln y$ 的极值.

解 $y > 0$ 令
$$\begin{cases} f_x(x, y) = 2x(2 + y^2) = 0 \\ f_y(x, y) = 2x^2y + \ln y + 1 = 0 \end{cases}$$
 解得
$$\begin{cases} x = 0 \\ y = e^{-1} \end{cases}$$

$$f_{xx}(x, y) = 2(2 + y^2) \quad f_{xy}(x, y) = 4xy \quad f_{yy}(x, y) = 2x^2 + \frac{1}{y}$$

在点 $(0, e^{-1})$ 处 $A = 4 + 2e^{-2}, B = 0, C = e$

由于 $AC - B^2 = 4e + 2e^{-1} > 0$

$$A = 4 + 2e^{-2} > 0$$

故 $f_{\text{极小}}(1, e^{-1}) = -e^{-1}$.

8.5.二

4. 设由方程 $x^2 - 6xy + 10y^2 - 2yz + z^2 + 18 = 0$ 所确定函数 $z = z(x, y)$ 的极值.

解 对 x 求偏导, $2x - 6y - 2yz_x - 2zz_x = 0$

对 y 求偏导, $-6x + 20y - 2z - 2yz_y - 2zz_y = 0$

令 $z_x = 0, z_y = 0$ 得, $x = 3y, z = -3x + 10y = y$

代入已知方程得 $9y^2 - 18y^2 + 10y^2 - 2y^2 - y^2 + 18 = 0$

$$\text{即 } y^2 = 9$$

$$x = \pm 9, y = \pm 3, z = \pm 3,$$

在点 $(9, 3, 3)$ 处 为了求出相应的 A, B, C

可在上面求偏导的基础上再进行求偏导,

8.5.二

4. 设由方程 $x^2 - 6xy + 10y^2 - 2yz + z^2 + 18 = 0$ 所确定函数 $z = z(x, y)$ 的极值.

解 对 x 求偏导, $2x - 6y - 2yz_x - 2zz_x = 0$

$$2 - 2yz_{xx} - 2(z_x)^2 - 2zz_{xx} = 0$$

$$-6 - 2z_x - 2yz_{xy} - 2z_y z_x - 2zz_{xy} = 0$$

对 y 求偏导, $-6x + 20y - 2z - 2yz_y - 2zz_y = 0$

$$20 - 2z_y - 2z_y - 2yz_{yy} - 2(z_y)^2 - 2zz_{yy} = 0$$

$$\text{即 } x = \pm 9, y = \pm 3, z = \pm 3,$$

在点 $(9, 3, 3)$ 处 为了求出相应的 A, B, C $z_x = 0, z_y = 0,$

$$2 - 6z_{xx} - 6z_{xx} = 0, A = \frac{1}{6} \quad -6 - 6B - 6B = 0, B = -\frac{1}{2}$$

$$\text{由于 } AC - B^2 = \frac{5}{18} - \frac{1}{4} > 0 \quad 20 - 6C - 6C = 0, C = \frac{5}{3}$$

$$A = \frac{1}{6} > 0, \quad \text{故 } f_{\text{极小}}(9, 3) = 3.$$

8.5.二

4. 设由方程 $x^2 - 6xy + 10y^2 - 2yz + z^2 + 18 = 0$ 所确定函数 $z = z(x, y)$ 的极值.

解 对 x 求偏导, $2x - 6y - 2yz_x - 2zz_x = 0$

$$2 - 2yz_{xx} - 2(z_x)^2 - 2zz_{xx} = 0$$

$$-6 - 2z_x - 2yz_{xy} - 2z_y z_x - 2zz_{xy} = 0$$

对 y 求偏导, $-6x + 20y - 2z - 2yz_y - 2zz_y = 0$

$$20 - 2z_y - 2z_y - 2yz_{yy} - 2(z_y)^2 - 2zz_{yy} = 0$$

$$\text{即 } x = \pm 9, y = \pm 3, z = \pm 3,$$

在点 $(-9, -3, -3)$ 处 为了求出相应的 A, B, C $z_x = 0, z_y = 0,$

$$2 + 6z_{xx} + 6z_{xx} = 0, A = -\frac{1}{6} \quad -6 + 6B + 6B = 0, B = \frac{1}{2}$$

$$\text{由于 } AC - B^2 = \frac{5}{18} - \frac{1}{4} > 0 \quad 20 + 6C + 6C = 0, C = -\frac{5}{3}$$

$$A = -\frac{1}{6} < 0, \quad \text{故 } f_{\text{极大}}(-9, -3) = -3.$$

8.5.二

5. 求二元函数 $f(x, y) = x^2 y(4 - x - y)$ 在直线 $x + y = 6$, x 轴, y 轴所围成闭区域 D 上的最值.

$$\text{解 } \begin{cases} f'_x(x, y) = 2xy(4 - x - y) - x^2 y = 0 \\ f'_y(x, y) = x^2(4 - x - y) - x^2 y = 0 \end{cases}$$

在区域 D 内有唯一驻点 $(2, 1)$, $f(2, 1) = 4$

再求 $f(x, y)$ 在 ∂D 上的最值. 在 x 轴或 y 轴点, $f(x, y) = 0$

在直线 $x + y = 6$ 上, $y = 6 - x, 0 \leq x \leq 6$,

$$f(x, y) = x^2 y(4 - x - y) = x^2(6 - x)(-2)$$

$$f'_x = 4x(x - 6) + 2x^2 = 0 \quad \text{得 } x_1 = 0, x_2 = 4$$

$$y_1 = 6, y_2 = 2, f(4, 2) = -64,$$

比较后得 $f_{\max}(2, 1) = 4$

$$f_{\min}(4, 2) = -64,$$

8.5.二

6. 在曲面 $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ 上求一点,使得它到点 $(1, \sqrt{2}, 3\sqrt{3})$ 的距离最短,并求最短距离.

解 构造辅助函数

$$F(x, y, z) = (x-1)^2 + (y-\sqrt{2})^2 + (z-3\sqrt{3})^2 + \lambda(z - \sqrt{x^2 + y^2})$$

$$\begin{cases} F'_x = 2(x-1) - \lambda \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 0 \\ F'_y = 2(y-\sqrt{2}) - \lambda \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 0 \\ F'_z = 2(z-3\sqrt{3}) + \lambda = 0 \\ F'_\lambda = z - \sqrt{x^2 + y^2} = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} 2z(x-1) - \lambda x = 0 \\ 2z(y-\sqrt{2}) - \lambda y = 0 \\ 2(z-3\sqrt{3}) + \lambda = 0 \\ z - \sqrt{x^2 + y^2} = 0 \end{cases}$$

唯一驻点, 由实际问题得

$$\begin{cases} y = \sqrt{2}x \\ z = \sqrt{3}x \\ \lambda = 2\sqrt{3}(3-x) \end{cases} \quad \begin{cases} x = 2 \\ y = 2\sqrt{2} \\ z = 2\sqrt{3} \end{cases}$$

最短距离点为 $(2, 2\sqrt{2}, 2\sqrt{3})$

最短距为 $\sqrt{6}$

8.5.二

7. 求过点 $(2, 1, \frac{1}{3})$ 的平面, 使它与三个坐标面在第一卦限部分所围成的立体体积最小.

解 设平面方程为 $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$, 立体体积为 $V = \frac{1}{6}abc$

构造辅助函数 $F(x, y, z) = abc - \lambda(\frac{2}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{3c} - 1)$

$$\begin{cases} F'_a = bc - \frac{2\lambda}{a^2} = 0 \\ F'_b = ac - \frac{\lambda}{b^2} = 0 \\ F'_c = ab - \frac{\lambda}{3c^2} = 0 \\ F'_\lambda = \frac{2}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{3c} - 1 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} a^2bc - 2\lambda = 0 \\ ab^2c - \lambda = 0 \\ 3abc^2 - \lambda = 0 \\ \frac{2}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{3c} - 1 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} a = 2b \\ a = 6c \\ a = 6, b = 3, c = 1 \end{cases}$$

唯一驻点, 由实际问题得

该平面为 $\frac{x}{6} + \frac{y}{3} + \frac{z}{1} = 1$

8.5.二

8. 设销售收入 R (单位:万元)与花费在两种广告宣传上的费用 x, y (单位:万元)之间的关系为

$$R(x, y) = \frac{200x}{x+5} + \frac{100y}{10+y}$$

若利润额相当于销售收入的五分之一.已知广告费用总预算为25万元, 试问如何分配该两种广告费用可使得利润最大,并求最大利润.

解 利润为 $L(x, y) = \frac{40x}{x+5} + \frac{20y}{10+y}$

构造辅助函数 $F(x, y) = \frac{40x}{x+5} + \frac{20y}{10+y} + \lambda(x+y-25)$

$$\text{令 } F'_x = \frac{200}{(x+5)^2} + \lambda = 0, F'_y = \frac{200}{(10+y)^2} + \lambda = 0$$

$$F'_\lambda = x + y - 25 = 0$$

解 利润为 $L(x, y) = \frac{40x}{x+5} + \frac{20y}{10+y}$

构造辅助函数 $F(x, y) = \frac{40x}{x+5} + \frac{20y}{10+y} + \lambda(x + y - 25)$

$$\text{令 } F'_x = \frac{200}{(x+5)^2} + \lambda = 0, F'_y = \frac{200}{(10+y)^2} + \lambda = 0$$

$$F'_\lambda = x + y - 25 = 0$$

$$\text{即 } \frac{200}{(x+5)^2} = \frac{200}{(10+y)^2} \quad x = 15, y = 10$$

$$F'_\lambda = x + y - 25 = 0$$

唯一驻点, 由实际问题得 $x = 15, y = 10$

$$L_{\max}(x, y) = 30 + 10 = 40 \text{ (万元)}$$